PRESENTACIÓN

Este documento titulado *Introducción a la Probabilidad*, elaborado por la Mtra. Ma. Guadalupe García Salazar y por la Dra. Lucía A. Ruiz Galindo, es un reporte de investigación del proyecto **Análisis de Series de Tiempo**, cuyo actualización fue aprobada por el Consejo Divisional de Ciencias y Humanidades, en su sesión 246 celebrada el 30 de Enero del 2007.

En el proyecto previamente mencionado se hace una presentación sucinta de los elementos básicos de la Probabilidad. En sus inicios existieron diferentes escuelas o enfoques de la misma: subjetivo, clásico y frecuentista, todos proponían diferentes manera de clacular la probabilidad de un suceso, sin embargo esas medidas tenían serios inconvenientes. El enfoque aximático, aunque no proporciona una forma de calcular la probabilidad, sí ofrece una definición consistente a partir de la cual se desarrolló la Teoría de la Probabilidad.

El trabajo inicia con los conceptos de experimento o fenómeno aleatorio, le sigue los correspondientes a los espacios muestrales y eventos, se continua con el de sigma álgebra a partir del cuál se presenta la definición formal de la probabilidad axiomática y se proporcionan sus propiedades, se finaliza con el resumen y la formalización de todos los conceptos mediante el denominado espacio de probabilidad. Es importante señalar que este trabajo reviste importancia no sólo porque reúne los elemenots básicos del estudio formal de la Probabilidad, si no también porque a los largo del mismo, se presentan ejemplos variados que pretenden aclarar los conceptos expuestos.

Dra. Beatriz García Castro
Jefa del Departamento de Economía

INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD

POR

MA. GUADALUPE GARCÍA SALAZAR Y
LUCÍA ATZIMBA RUIZ GALINDO

Reporte de Investigación

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO
División de Ciencias Sociales y Humanidades
Departamento de Economía

Diciembre, 2013

1. Introducción

Los fenómenos que se presentan cotidianamente se pueden clasificar en determinísticos y no determinísticos o aleatorios. Los primeros se caracterizan porque se sabe con seguridad lo que va a suceder, mientras que en los fenómenos o experimentos aleatorios no se tiene esa certeza, razón por la que es necesario una medida que proporcione el grado de certidumbre de cada uno de sus resultados, esa medida es la que se conoce como *medida de probabilidad* o simplemente, *probabilidad*. De esta forma, la *Probabilidad* es el marco adecuado para estudiar los fenómenos o experimentos aleatorios.

2. Experimentos aleatorios

Experimentos aleatorios y deterministas

Un *fenómeno o experimento aleatorio* $\mathcal{E}$, es el que satisface las siguientes características:

i) se conocen todos sus resultados,

ii) cuando se lleva a cabo no se sabe con certeza el resultado que se va a obtener y

iii) puede ser repetido bajo idénticas condiciones.

Un experimento no aleatorio se denomina *fenómeno o experimento determinista* y por ello, cuando se realiza bajo las mismas condiciones se sabe con certeza su resultado.
Un *ensayo* es una realización de un experimento aleatorio.

De acuerdo a lo anterior, el experimento es aleatorio si para un ensayo particular su resultado no es previsible con certidumbre, mientras que en un fenómeno determinista en cualquier ensayo hay certeza del resultado que se obtendrá y si se realiza bajo las mismas condiciones se obtiene siempre el mismo resultado.

Ejemplo 2.1. El experimento $\mathcal{E}$ que consiste en lanzar una moneda honesta, no cargada, es aleatorio, ya que

i) se saben los resultados que se pueden obtener: águila o sol,

ii) en cada lanzamiento o ensayo, no se conoce con seguridad cuál de las dos caras va a salir y

iii) puede considerarse que los lanzamientos se realizan bajo idénticas condiciones.

Ejemplo 2.2. El experimento de medir la velocidad a la que debe viajar Fulanito para recorrer 270 kms. en 1 hora 30 minutos, es un experimento determinista, puesto que la velocidad (v) es igual a la distancia (d) entre el tiempo (t), $v = \frac{d}{t}$, de forma que se sabe con certeza que la velocidad a la que debe manejar Fulanito es de 3 kms. por minuto o bien, 180 kms. por hora, si quiere llegar a su destino en 90 minutos.

Si Zutanito también desea hacer el recorrido en el mismo tiempo, la velocidad a la que viajara será la misma que la de Fulanito, puesto que las condiciones bajo las cuales se realiza ambos ensayos son las mismas, recorrer 270 kms en 1 hora 30 minutos. Cualquier individuo que quiera hacer ese recorrido en el tiempo propuesto, debe viajar a la velocidad obtenida.

Ejemplo 2.3. ¿Cuáles de los siguientes experimentos son aleatorios?

$\mathcal{E}_1$: Lanzar un dado no cargado y anotar el número que se muestra.

$\mathcal{E}_2$: Contar las páginas de un libro de 87 hojas.

$\mathcal{E}_3$: Medir el tiempo de vida de un foco.

$\mathcal{E}_4$: Seleccionar un hombre de un equipo de basketball varonil.

Los experimentos $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_3$ son aleatorios. En el de lanzar el dado se sabe qué resultados se deben obtener: 1, 2, 3, 4, 5 o 6, pero al lanzarlo no se conoce el número que se va a mostrar, aún cuando sea lanzado en las mismas condiciones. Por su parte, en el experimento de medir el tiempo de vida de un foco, puede ser que cuando se encienda por primera vez ya no funcione o que dure unos segundos, minutos, horas, días, etc., es decir, se saben los posibles resultados pero para un foco particular no se conoce con seguridad su tiempo de vida aún cuando se coloque en el mismo lugar.

En el experimento $\mathcal{E}_2$ que consiste en contar el número de páginas de un libro de 87 hojas, se sabe con certeza que el resultado es 174 páginas, hecho que lo hace ser no aleatorio, es un experimento determinista. De igual forma, en el $\mathcal{E}_4$, al seleccionar una persona del equipo de basketball varonil con toda certeza se va a elegir a un varón, por lo que el experimento tampoco es aleatorio.

Ejemplo 2.4. Los ejemplos clásicos de fenómenos o experimentos aleatorios son los juegos de azar, el pokar, los volados, la ruleta, etc. Por ejemplo, en una mano de pokar, las cartas se distribuyen a los jugadores de manera aleatoria, ninguno sabe el juego que le va a tocar. Al lanzar una moneda honesta (no cargada), no se conoce si al caer se va a mostrar águila o sol.

Ejemplo 2.5. Otros ejemplos de experimentos aleatorios son los resultados de los partidos de football, basketball, tenis o las competencias de natación, equitación, las carreras, los maratones, etc. En cada uno de esos fenómenos no se sabe cuál va a ser el marcador o quién va a resultar ganador.

Ejemplo 2.6. Dentro de los experimentos aleatorios también se encuentra la dinámica o comportamiento futuro de las variables económicas, demográficas, financieras, entre otras. La inflación mensual, las tasas de interés trimestral, el PIB anual, son ejemplos de variables que no se sabe con certeza el valor que van a tener para el siguiente día, semana, mes, trimestre o año.

3. Ejercicios

Ejercicio 3.1. ¿Cuál de los siguientes experimentos son aleatorios? Explica tu respuesta.

a) El tiempo transcurrido entre dos llamadas telefónicas.

b) El comportamiento de la Bolsa Méxicana de Valores.

c) Obtener el producto de dos matrices.

d) La ocurrencia de un accidente automovilístico en San Pablo y Montevideo.

e) Contar el número de personas que hace uso de un cajero automático.

f) Apostar en el melate.

g) Contar el número de jugadores que participan en un partido de fútbol.

h) Elegir al rector general de la UAM.

i) Medir el tiempo que se demora una persona en la caja del supermercado.

j) Jugar a la lotería.

k) Calcular la raíz cuadrada de 144.

l) El resultado de la prueba del alcoholímetro.

Ejercicio 3.2. Proporcione ejemplos de experimentos aleatorios y otros tantos de deterministas.

Ejercicio 3.3. ¿La puesta del sol puede ser considerada un experimento aleatorio? Justifique su respuesta

Ejercicio 3.4. Considera el experimento de seleccionar una ficha de un dominó de 28, ¿es aleatorio? Si su respuesta es afirmativa, describa cuáles son todos los posibles resultados.

Ejercicio 3.5. Si un experimento tiene un único resultado ¿es aleatorio? Justifique ampliamente su respuesta y proporcione un ejemplo.

4. Espacio muestral y eventos

Espacios muestrales y eventos

Dado el experimento aleatorio $\mathcal{E}$. El espacio muestral omega, Ω, de $\mathcal{E}$, es el conjunto de todos los posibles resultados de $\mathcal{E}$.

Ω es un *espacio muestral discreto* si es un conjunto contable, es decir, si es un conjunto finito o infinito contable.

Ω es un *espacio muestral continuo* si no es contable.

Un *evento* es cualquier subconjunto de Ω.

Un *evento elemental* es un evento constituido por un solo elemento de Ω.

Observe que

- La unión de todos los eventos elementales es Ω y su intersección es el conjunto vacío, $\emptyset$. [1]

- Como todo evento es un subconjunto del espacio muestral Ω,

  a) $A \subseteq \Omega$ significa que A es un evento del espacio muestral Ω.

  b) $\emptyset$ y Ω son eventos, puesto que son subconjuntos de Ω: $\emptyset \subseteq \Omega$ y $\Omega \subseteq \Omega$.

     Al $\emptyset$ se le suele llamar el *evento imposible* y a Ω el *evento seguro*, siempre y cuando el espacio muestral sea discreto.

  c) Cualquier operación entre eventos es un evento.[2]

     Si A y B son eventos del espacio muestral Ω, $A \cup B$, $A \cap B$ y A^c también son eventos de Ω, puesto que $A \cup B \subseteq \Omega$, $A \cap B \subseteq \Omega$ y $A^c \subseteq \Omega$.

Ejemplo 4.1. En el experimento del ejemplo 2.1 que consiste en lanzar una moneda honesta, el espacio muestral es

$$\Omega = \{a, s\},$$

donde a denota que la cara mostrada al lanzar la moneda es águila y s que es sol. Como los elementos de Ω se pueden contar, Ω es un espacio discreto. {a} y {s} son eventos de Ω: $\{a\} \subseteq \Omega$, $\{s\} \subseteq \Omega$, y son elementales, su unión es Ω y su intersección es el $\emptyset$.

Ejemplo 4.2. En el experimento $\mathcal{E}_1$ del ejemplo 2.3, el espacio muestral del lanzamiento del dado es

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

y es discreto ya que sus elementos se pueden contar. El evento A constituido por los números pares es $A = \{2, 4, 6\}$, el B integrado por los números menores que 3 es $B = \{1, 2\}$, el C_i formado por el número i, $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ es $C_i = \{i \mid i = 1, 2, \ldots, 6\}$ o bien, $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{2\}$, ... , $C_6 = \{6\}$, y el D, el de los números primos es $D = \{2, 3, 5\}$. De todos esos

[1] El lector interesado podrá consultar el Anexo en el que se presentan algunos elementos básicos de la Teoría de Conjuntos.

[2] En las siguientes operaciones solo se consideran dos eventos, pero ellas se pueden realizar con más.

eventos sólo los C_i´s son elementales, su unión es todo Ω y su intersección es el conjunto vacío, es decir,

$$\cup_{i=1}^{6} C_i = \Omega \quad \text{y} \quad \cap_{i=1}^{6} C_i = \emptyset.$$

Además, como $A^c = \{1, 3, 5\}$, $A \cup D = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{2\}$ son subconjuntos de Ω, entonces también son eventos. Por otro lado, el conjunto E formado por los números mayores que 6, también es un evento de Ω (¿Por qué?), pero $F = \{7\}$ no lo es (¿Por qué?).

Ejemplo 4.3. En el ejemplo 2.3 se consideró el experimento aleatorio $\mathcal{E}_3$ que consiste en medir el tiempo de vida de un foco, el conjunto de todos sus resultados posibles se puede formular como $[0, T]$, donde T es un número real ($T \in R$), que denota el tiempo máximo que puede durar un foco y puede estar medido en segundos, minutos, horas, semanas, meses, etc. De esta manera,

$$\Omega = [0, T]$$

es un espacio muestral continuo dado que sus elementos no se pueden contar. Los intervalos $A = [1000, 9999)$ y $B = (0, 1)$ son eventos de Ω, pero $(-1, 10]$ no lo es (¿Por qué?).

Ejemplo 4.4. En el casino de la feria de San Marcos del merito Aguascalientes, a los jóvenes les gusta jugar en la ruleta. Considere el experimento aleatorio $\mathcal{E}_T$ que consiste en girar la ruleta y observar el tiempo en segundos, que tarda en detenerse. Como la ruleta no puede girar indefinidamente, el espacio muestral de $\mathcal{E}_T$ se puede formular como

$$\Omega = (0, T],$$

donde $T \in R$ es el tiempo máximo que de acuerdo a la experiencia del operador, la ruleta tarda en detenerse (¿Ω es un espacio muestral discreto o continuo?).

Sean los eventos

A: el tiempo en detenerse sea mayor a 15 segundos,

B: el tiempo en detenerse sea menor que 30 segundos,

C: el tiempo en detenerse sea de al menos 45 segundos y

D: el tiempo en detenerse sea de 10 a 20 segundos o alternativamente, $A = (15, T]$, $B = (0, 30)$, $C = [45, T]$ y $D = [10, 20]$. Los conjuntos

$$A \cap B = (15, 30), \quad B^c = [30, T], \quad A \cup B = \Omega,$$

$$(B \cup C)^c = [30, 45), \quad A \cap D = (15, 20], \quad A \cup C \cup D = [10, T],$$

$$A \cap B \cap D = (15, 20] \ \text{ y } \ (A \cup C \cup D)^c = (0, 10),$$

son eventos de Ω, ya que todos ellos son subconjuntos de ese espacio muestral.

Ejemplo 4.5. Considera que la ruleta del ejemplo anterior tiene los números del 0 al 36 y que interesa el experimento aleatorio $\mathcal{E}_I$ que consiste en contar el número de intentos que se llevan a cabo para obtener un número par. El espacio muestral de este experimento es $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\}$ y es discreto. Los eventos

A: obtener un número par después del sexto intento,

B: obtener un número par en el décimo intento y

C: obtener un número par a lo más en el sexto intento

pueden expresarse de manera respectiva como

$$A = \{7, 8, 9, \ldots\},\ B = \{10\} \text{ y } C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Los conjuntos $A \cap B = \{10\}$, $A \cup B = A$, $C^c = A$, $A \cup C = \Omega$, $A \cap C = \emptyset$, también son eventos de Ω.

5. Ejercicios

Ejercicio 5.1. En el experimento aleatorio de lanzar una moneda honesta dos veces, interesa la sucesión de caras que se muestran. Describa el espacio muestral y los eventos caras iguales, caras diferentes, dos águilas, al menos un sol, tres caras iguales. ¿El espacio muestral es discreto o continuo? ¿Cuáles de los eventos descritos son elementales? Muestre un evento cuyo complemento sea obtener caras iguales, dos eventos cuya unión sea el espacio muestral y que se intersecten, y tres eventos cuya intersección no sea el vacío. ¿Cómo cambian todas tus respuestas si en lugar de lanzar una moneda dos veces, se lanzan dos monedas una vez?

Ejercicio 5.2. Formule el espacio muestral del experimento aleatorio que consiste en lanzar una moneda hasta que la cara mostrada sea águila. ¿Es discreto? ¿Cuántos elementos tiene?

Ejercicio 5.3. Considere el experimento de contar el número de llamadas telefónicas que recibe Susanito en su celular ¿es aleatorio?, en caso afirmativo describa el espacio muestral y proporcione ejemplos de eventos elementales y no elementales.

Ejercicio 5.4. ¿Cuál es el espacio muestral del experimento aleatorio de lanzar dos dados iguales? Describa los eventos

A: caras diferentes,

B: caras iguales,

C: una cara par y otra impar,

D: caras con números primos y

E: caras con números mayores que 7.

¿Cuáles son elementales? ¿Quién es A^c, $A \cup B$, $(A \cup B)^c$ y $C \cap D$? ¿Cómo cambian sus respuestas si los dados son diferentes?

Ejercicio 5.5. Una urna contiene 5 bolas de diferente color: amarilla, blanca, azul, verde y anaranjada. Describe el espacio muestral del experimento aleatorio que consiste en seleccionar una bola y contar el número de letras de su color. ¿Cuales son los eventos elementales? ¿Cuál es su unión, su intersección y el complemento de cada uno? Muestra todos los eventos de dos elementos. ¿Cuáles son los eventos de cuatro elementos? ¿Y los de tres?

Ejercicio 5.6. Describa el espacio muestral del experimento de medir la estatura de los niños que ingresan a la primaria. ¿Es discreto o continuo? ¿Por qué?

Ejercicio 5.7. Un experimento consiste en seleccionar aleatoriamente un punto del círculo unitario, describa el espacio muestral e indique si es continuo o discreto.

Ejercicio 5.8. Considere un espacio muestral con cinco elementos. Describa el conjunto constituido por todos los eventos de ese espacio muestral, ¿cuántos son sus elementos?

6. σ-álgebra

σ-álgebra

Sea $\mathcal{E}$ un experimento aleatorio y Ω su espacio muestral. Una colección $\mathcal{F}$ de eventos de Ω es una *σ-álgebra* (sigma álgebra) de Ω, si satisface las siguientes condiciones

i) $\Omega \in \mathcal{F}$,

ii) Si $A \in \mathcal{F}$, $A^c \in \mathcal{F}$,

iii) Si $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\} \subset \mathcal{F}$ es contable, $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

La primera condición establece que el espacio muestral es un elemento de la σ-álgebra $\mathcal{F}$, la segunda plantea que $\mathcal{F}$ es cerrada bajo complementos, es decir, que si se elige un elemento de $\mathcal{F}$ su complemento también es un elemento de $\mathcal{F}$ y la tercera, que es cerrada bajo uniones contables, esto es, si se toma un número contable de elementos de $\mathcal{F}$, su unión también está en $\mathcal{F}$. Es importante notar que los elementos de una σ-álgebra son eventos, que las dos primeras condiciones implican que $\emptyset \in \mathcal{F}$ y la tercera, que $\cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Ejemplo 6.1. Considere el $\mathcal{E}$ de lanzar una moneda y su espacio muestral $\Omega = \{a, s\}$, el conjunto

$$\mathcal{F}_1 = \{\Omega, \emptyset, \{a\}, \{s\}\}$$

es una σ-álgebra de Ω, puesto que $\Omega \in \mathcal{F}_1$, si se elige cualquier elemento de $\mathcal{F}_1$, su complemento está en $\mathcal{F}_1$ y si se selecciona un número arbitrario de elementos de $\mathcal{F}_1$, su unión está en $\mathcal{F}_1$. De igual manera, el conjunto

$$\mathcal{F}_2 = \{\Omega, \emptyset\}$$

también es una σ-álgebra de Ω. Sin embargo,

$$\mathcal{F}_3 = \{\Omega, \emptyset, \{a\}\}$$

no lo es, ya que $\{a\}^c = \{s\} \notin \mathcal{F}_3$, esto es, $\mathcal{F}_3$ no es cerrado bajo complemento.

Ejemplo 6.2. Suponga un experimento aleatorio $\mathcal{E}$ con sólo tres resultados y su espacio muestral $\Omega = \{a, b, c\}$, el conjunto

$$\mathcal{F}_1 = \{\Omega, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$$

no es una σ-álgebra de Ω, ya que el complemento de los eventos elementales de Ω no está en $\mathcal{F}_1$, es decir, $\{a\}^c = \{b, c\} \notin \mathcal{F}_1$, $\{b\}^c = \{a, b\} \notin \mathcal{F}_1$ y $\{c\}^c = \{a, b\} \notin \mathcal{F}_1$, pero $\mathcal{F}_2 = \{\Omega, \emptyset\}$ sí es una σ-álgebra de Ω, al igual que $\mathcal{F}_3 = \{\Omega, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$ (¿Por qué?)

Conjunto potencia

Dado un espacio muestral Ω, $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset\}$ es denominada la *σ-álgebra trivial* y el conjunto formado por todos los subconjuntos de Ω también es una σ-álgebra que se conoce como *conjunto potencia.*

Ejemplo 6.3. Observe que la σ-álgebra

$$\mathcal{F}_1 = \{\Omega, \emptyset, \{a\}, \{s\}\}$$

del ejemplo 6.1, es el conjunto potencia del espacio muestral $\Omega = \{a, s\}$.

Ejemplo 6.4. Sea $\Omega = \{a, b, c, d\}$ el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio.

$$\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset, \{a, b, c\}, \{d\}\}$$

es una σ-álgebra y no es la trivial ni el conjunto potencia. ¿Cuál es el conjunto potencia de Ω?

7. Probabilidad axiomática y propiedades

Definición

Sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra del espacio muestral Ω. La *probabilidad* P, es una función

$$P : \mathcal{F} \to [0, 1]$$

que satisface los axiomas

A1. $P(\Omega) = 1$.

A2. $P(A) \geq 0$, para todo $A \in \mathcal{F}$.

A3. Si $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ es un conjunto contable tal que $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, \ldots, n, \ldots$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$ para toda $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n, \ldots$, entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n \ldots) = P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

.

La definición anterior se conoce como la *definición axiomática de probabilidad*, en ella, a diferencia de los otros enfoques de probabilidad, no se plantea cómo determinar la probabilidad, establece que si se propone una forma de calcularla debe ser una función cuyo dominio es una σ-álgebra del espacio muestral, su rango el intervalo $[0, 1]$ y además, debe satisfacer los axiomas de probabilidad A1, A2 y A3.

El primer axioma plantea que la probabilidad del espacio muestral es uno, el segundo dice que la probabilidad de cualquier evento es no negativa (positiva o cero) y el tercero, que la probabilidad de la unión contable de *eventos mutuamente excluyentes* (disjuntos) de Ω es igual a las suma de las probabilidades de esos eventos.

Ejemplo 7.1. Sean $\Omega = \{a, b\}$ y $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$ una σ-álgebra de Ω. La función

$$P(\Omega) = 1,\ P(\emptyset) = 0,\ P(\{a\}) = \frac{2}{3}\ \text{ y } P(\{b\}) = \frac{1}{3}$$

satisface los axiomas A1-A3 y por ello P es una probabilidad, pero P definida como

$$P(\Omega) = 1,\ P(\emptyset) = 0,\ P(\{a\}) = \frac{3}{4},\ P(\{b\}) = \frac{1}{4} \text{ y } P(\{a\}) = 0$$

no lo es, aún cuando P satisface los axiomas A1-A3 (¿Por qué?).

Ejemplo 7.2. Considere el experimento aleatorio de seleccionar una bola de una urna que contiene tres de diferente color: verde (v), blanca (b) y roja (r), su espacio muestral es $\Omega = \{v, b, r\}$, si se selecciona como σ-álgebra el conjunto potencia de Ω, es decir,

$$\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset, \{v\}, \{b\}, \{r\}, \{v, b\}, \{v, r\}, \{b, r\}\},$$

la función

$$P(\Omega) = 1,\ P(\emptyset) = 0,\ P(\{v\}) = \frac{2}{3} \text{ y } P(\{b\}) = \frac{1}{3}$$

no es una probabilidad (¿Por qué?). Sin embargo,

$$P(\Omega) = 1,\ P(\emptyset) = 0,\ P(\{v\}) = P(\{b\}) = P(\{r\}) = \frac{1}{3} \text{ y}$$

$$P(\{v, b\}) = P(\{v, r\}) = P(\{b, r\}) = \frac{2}{3}$$

sí lo es.

Propiedades

Sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra del espacio muestral Ω y P una función de probabilidad que satisface loa axiomas A1-A3,

P1. $P(\emptyset) = 0$.

P2. Si $A \in \mathcal{F}$, $P(A^c) = 1 - P(A)$.

P3. Si $A, B \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$, $P(A) \leq P(B)$.

P4. Si $A, B \in \mathcal{F}$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Ejemplo 7.3. El espacio muestral de lanzar un dado dos veces es

$$\Omega = \{(i, j) \mid i = 1, \ldots, 6,\ j = 1, \ldots, 6\},$$

donde i representa el número observado en el primer lanzamiento y j el del segundo, defina la probabilidad de cualquier evento $A \in \mathcal{F}$ como

$$P(A) = \frac{\text{elementos de } A}{\text{elementos de } \Omega},$$

donde $\mathcal{F}$ es el conjunto potencia de Ω. Considere los eventos

A: caras números iguales y B: caras con números pares

o equivalentemente,

$A = \{11, 22, 33, 44, 55, 66\}$ y $B = \{22, 24, 26, 42, 44, 46, 62, 64, 66\}$.

$$P(A) = \frac{6}{36}, \quad P(A^c) = 1 - P(A) = \frac{30}{36}$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{36} + \frac{9}{36} - \frac{3}{36} = \frac{12}{36},$$

ya que A, B no son disjuntos, $A \cap B = \{22, 44, 66\}$. Ahora considere que el evento C esta constituido por caras con números diferentes,

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{6}{36} + \frac{30}{36} = 1,$$

puesto que $A \cap C = \emptyset$. Observe que $A \cup C = \Omega$ y que $C^c = A$, por tanto

$$P(A \cup C) = P(\Omega) = 1$$

y

$$P(C^c) = P(A) = \frac{6}{36}.$$

Ejemplo 7.4.

Espacio de Probabilidad

Un *espacio de probabilidad* es un arreglo constituido por un espacio muestral, Ω, una σ-álgebra, $\mathcal{F}$, y una función de pro-babilidad, P, definida sobre $\mathcal{F}$, esto es, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Ejemplo 7.5. Considere un experimento aleatorio cuyo espacio muestral es Ω, la σ-álgebra trivial ($\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset\}$) y la probabilidad definida como

$$P(\Omega) = 1 \;\text{ y }\; P(\emptyset) = 0,$$

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilidad.

Ejemplo 7.6. El espacio muestral del experimento aleatorio que consiste en lanzar una moneda dos veces es

$$\Omega = \{aa, as, sa, ss\},$$

si la σ-álgebra es

$$\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset, \{aa\}, \{as, sa, ss\}\}$$

y la probabilidad se define como

$$P(\Omega) = 1,\; P(\emptyset) = 0,\; P(\{aa\}) = \frac{1}{4} \;\text{ y }\; P(\{sa, as, ss\}) = \frac{3}{4},$$

entonces $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilidad.

8. Ejercicios

Ejercicio 8.1. Considere el experimento del ejemplo 7.3, muestre que la probabilidad definida es una función que satisface los axiomas de probabilidad.

Ejercicio 8.2. Describa el conjunto potencia asociado al espacio muestral del ejemplo 7.6, defina una medida de probabilidad y formule el espacio de probabilidad correspondiente.

Ejercicio 8.3. Formule el espacio de probabilidad del ejemplo 7.3.