PRESENTACIÓN

El presente reporte de investigación titulado "El gasto de gobierno en una economía monetaria" tiene como objetivo ampliar los análisis establecidos a partir del estudio del cambio tecnológico generado por el gobierno y su efecto sobre el crecimiento económico. En el trabajo se analizan los efectos del gasto de gobierno para generar nuevas tecnologías y el impacto de la emisión de dinero, ambos sobre el crecimiento económico. Su estudio obedece a la necesidad de verificar impactos positivos sobre el crecimiento económico de una economía en vías de desarrollo, en el marco del proyecto "El cambio tecnológico generado por el gobierno en la teoría del crecimiento: una nueva perspectiva" con registro 952. En este reporte se demuestra que el efecto sobre el crecimiento económico es positivo, debido a un cambio en las condiciones tecnológicas generado por el gasto del gobierno, además se verifica la neutralidad del dinero toda vez que la tasa de crecimiento monetaria no afecta a la tasa de crecimiento económico.

Dr. Alfredo Sánchez Daza
Jefe del Departamento de Economía

EL GASTO DE GOBIERNO EN UNA ECONOMÍA MONETARIA

Salvador Rivas Aceves

Javier Juan Froilán Martínez Pérez

RESUMEN

En el presente trabajo se desarrolla un modelo de crecimiento endógeno en donde el gobierno interviene en la generación de tecnología. En el marco de una economía monetaria se caracteriza el nivel óptimo de gasto de gobierno para impulsar el nivel tecnológico, y en consecuencia el crecimiento económico, así mismo se analiza el impacto que dicho gasto tiene sobre el bienestar económico. Por último, se establecen varias recomendaciones, en materia de política industrial, orientadas hacia el incremento del producto marginal del capital.

Palabras clave: crecimiento endógeno, gasto de gobierno, cambio tecnológico, dinero, política industrial.
Clasificación JEL: O38, 042.

Proyecto

1. **Presentación**

2. **El modelo base**

3. **Gasto de gobierno y el motivo transacción**

4. **Gasto de gobierno y el motivo reserva de valor**

5. **Conclusiones**

1. Presentación

El análisis del crecimiento económico de largo plazo, de manera endógena, ha tomado mucha fuerza dentro de la teoría del crecimiento desde los trabajos de Romer (1986, 1990) y Lucas (1988), en los cuales se enfatiza que la endogeneidad en los desarrollos teóricos es pertinente. Inicialmente, la introducción del gobierno en la teoría del crecimiento se hizo en función del impacto que éste genera sobre el crecimiento a través de las políticas gubernamentales que logren modificar la tasa de retorno del capital, como en el caso de Jones y Manuelli (1990).

Muchos otros modelos de crecimiento endógeno explican el crecimiento económico en términos del comportamiento del gobierno; por ejemplo; Barro (1990) que estudia cómo el gasto de gobierno y el tamaño relativo del mismo impactan el crecimiento económico; Futagami-Morita-Shibata (1993) amplían el análisis de Barro y muestran que la tasa de crecimiento es la máxima cuando la tasa de ingresos impositivos es igual a la elasticidad del producto respecto al capital público; Venegas-Martínez (1999) que establece que si la deuda pública externa crece a una tasa mayor que la deuda externa privada, entonces existe un intercambio (tradeoff) entre deuda pública externa y crecimiento; y en Venegas-Martínez (2008) que analiza cómo la política fiscal afecta al crecimiento.

La presente investigación, en el marco de una economía monetaria, estudia el efecto de la participación del gobierno en el desarrollo de tecnología en un modelo de crecimiento endógeno. A diferencia de los modelos de crecimiento neoclásicos estándar, la utilización de dicho instrumental en este modelo permitirá explicar el efecto que tiene la política gubernamental tecnológica sobre la tasa de crecimiento. El dinero entra en el modelo a través de dos motivos: para el financiamiento del consumo (Clower, 1967) y como argumento en la función de utilidad (Patinkin 1956 y Sidrauski 1967).

La organización del trabajo es como sigue, en la sección 2 se describe el modelo básico de crecimiento endógeno incluyendo el comportamiento del gobierno. En el transcurso de las secciones 3 y 4, en el marco de una economía monetaria, se caracteriza el nivel óptimo de gasto de gobierno para el desarrollo de tecnología y se analiza el impacto de dicho gasto en el bienestar económico. En la sección 5 se presentan las conclusiones, así como las limitaciones y sugerencias para futuras investigaciones. Por último, se presenta un apéndice que contiene los detalles de los resultados analíticos del problema de maximización de utilidad de los agentes.

2. El modelo base

En esta sección se describe, brevemente, el modelo básico de crecimiento endógeno a fin de tener un punto de referencia que permita resaltar las diferencias cuantitativas y cualitativas que surjan en el modelo propuesto cuando se introduzca el gobierno como agente promotor de la tecnología.

Inicialmente considere una economía, con rendimientos constantes a escala y rendimientos marginales decrecientes, en donde viven agentes económicos con dotaciones y preferencias idénticas, que tienen vida infinita y en donde además la técnica para producir un único bien está dada. Se trata de una nación que no sostiene intercambios comerciales con otras economías, por lo que la economía es cerrada, y en donde los consumidores buscan maximizar el nivel de utilidad que obtiene gracias al consumo. Suponga que dicha utilidad está dada por:

$$\mathcal{U} = \int_0^\infty u(c_t)e^{-\rho t}\,dt, \tag{1}$$

en donde c es el consumo *per capita* y ρ es la tasa subjetiva de descuento que mide qué tan ansioso está un individuo por el consumo presente, es decir, su disposición a consumir en el presente. Suponga también que la utilidad por el consumo de los individuos está determinada por la siguiente función:

$$u(c_t) = \ln c_t. \tag{2}$$

Este tipo de especificación del consumo satisface que $u'(c_t) > 0$ y $u''(c_t) < 0$. Por lo tanto, la utilidad marginal que le genera al consumidor una unidad adicional de consumo del bien, es positiva pero decreciente. Por otro lado, se supone que el consumidor posee una empresa por lo que simultáneamente toma decisiones de consumidor y de productor. Suponga ahora que el gobierno interviene en el desarrollo de tecnología afectando la productividad del capital, por lo que la función de producción toma la forma:

$$y_t = Agk_t, \tag{3}$$

en donde $g > 0$ es el gasto que el gobierno realizará como inversión en la tecnología, A representa el nivel tecnológico disponible en la economía, k_t es el capital físico y y_t es el producto. El problema de maximización del consumidor y sus condiciones de optimalidad correspondientes (de primer orden) son:

$$\text{Maximizar } \mathcal{U} = \int_0^{\infty} \ln c_t \, e^{-\rho t} \, dt$$

$$\text{s.a.} \quad \dot{k}_t = Agk_t - c_t, \qquad \text{dado} \;\; k_0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_t} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_t} = \dot{k}_t, \quad -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k_t} = \dot{\lambda}_t - \lambda_t \rho, \tag{5}$$

$$\lim_{t \to \infty} k_t \, e^{-(Ag)t} = 0, \tag{6}$$

donde k_0 es el capital inicial, c_t es el consumo, ρ es la tasa subjetiva de descuento, $\mathcal{H} = \ln c_t + \lambda_t (Agk_t - c_t)$ es el Hamiltoniano y λ_t es la variable de co-estado. Bajo estas condiciones, la trayectoria del consumo satisface:

$$c_t = \rho k_0 e^{(Ag-\rho)t}. \tag{7}$$

De lo anterior se desprende que el nivel de consumo de equilibrio depende del parámetro de preferencias ρ, del capital inicial k_0 y del gasto de gobierno g. Un aumento en las últimas dos variables incrementará el nivel de consumo. Por otro lado, se tiene que, si $Ag > \rho$, con $g > 1$, entonces el consumo crecerá a un mayor ritmo que en el caso en donde no interviene el gobierno.

En caso contrario, es decir, si $Ag < \rho$, entonces el consumo decrecerá. Es deseable que $g > 1$ ya que sólo así se cumple que $Ag > A$. De esta forma, si el gobierno invierte en tecnología, entonces éste puede influir en el crecimiento económico. Análogamente, la trayectoria del capital es:

$$k_t = k_0 e^{(Ag-\rho)t}. \tag{8}$$

Una vez más si $Ag > \rho$, entonces el capital crecerá. Lo contrario sucederá si $Ag < \rho$. Como se muestra, las trayectorias del consumo y del capital dependen de la tasa subjetiva de descuento, de la tecnología y del gasto de gobierno, por lo tanto la tasa de crecimiento *per capita* ahora estará dada por:

$$\gamma = \frac{\dot{y}_t}{y_t} = \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{\dot{k}_t}{k_t} = Ag - \rho. \tag{9}$$

En consecuencia, la tasa de crecimiento en todos los sectores de la economía depende de de la diferencia $Ag - \rho$, por lo que sí $Ag > \rho$, todos los sectores crecen, mientras que decrecen sí $Ag < \rho$. Observe que el crecimiento es balanceado. Por lo tanto, el impacto del gasto de gobierno sobre la tasa de crecimiento es positivo ya que $\gamma > \varphi$.

A continuación se evalúa el impacto que tiene el gasto del gobierno, la tecnología y el capital inicial sobre el bienestar de los agentes. Para ello, se obtiene la función del bienestar económico, $\mathcal{W}$, la cual resulta de la sustitución del nivel óptimo de consumo en la función directa de utilidad, por lo que se tiene:

$$\mathcal{W} = \int_0^{\infty} \ln\left(\rho k_0 e^{(Ag-\rho)t}\right) e^{-\rho t}\, dt. \tag{10}$$

Equivalentemente,

$$\mathcal{W} = \frac{\ln(\rho k_0)}{\rho} + \frac{Ag-\rho}{\rho^2}. \tag{11}$$

De la ecuación anterior se deduce que el bienestar económico está en función del coeficiente tecnológico disponible A, del impacto del gobierno g, de las preferencias del individuo ρ y del capital inicial k_0. Un aumento en el gasto de gobierno, como inversión en tecnología, aumenta el bienestar. De esta manera, el gobierno no sólo participa en la generación de tecnología, sino que con ello incrementa, a su vez, el bienestar de los agentes. Lo anterior es debido a que:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial g} = \frac{A}{\rho^2} > 0. \tag{12}$$

Por su parte, un aumento en la tecnología a través del parámetro A incrementará el bienestar, ya que se cumple con:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial A} = \frac{g}{\rho^2} > 0. \tag{13}$$

Evidentemente, se espera que en países con un mayor desarrollo tecnológico el nivel de bienestar económico sea más alto que en países tecnológicamente rezagados. Análogamente, un aumento en el capital inicial aumentará el bienestar económico de los agentes, toda vez que:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial k_0} = \frac{1}{\rho k_0} > 0. \tag{14}$$

Por último, un incremento en la tasa subjetiva de descuento, lo cual se traduce en una mayor ansiedad o disposición por parte del individuo para consumir en el presente, deteriora el bienestar debido a que:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \rho} = -\frac{2}{\rho^3} < 0. \tag{15}$$

En consecuencia, el bienestar aumentará conforme se tenga un aumento en el capital inicial, o en el gasto de gobierno, o si se da un aumento en el nivel de tecnología mediante el coeficiente A. Por otro lado, el bienestar disminuirá si aumenta la tasa subjetiva de descuento.

En resumen, el modelo muestra que la participación del gobierno en la generación de tecnología tiene un efecto positivo sobre el crecimiento y el bienestar de los hogares.

3. Gasto de gobierno y el motivo transacción

A continuación, se expande el análisis al introducir el dinero, por lo que en el marco de una economía monetaria el dinero entra a través de dos motivos: para el financiamiento del consumo, es decir motivo transacción, (Clower, 1967) y como argumento en la función de utilidad, es decir motivo reserva de valor, (Patinkin 1956 y Sidrauski 1967), se analiza el impacto que tiene el gasto de gobierno en generación de tecnología sobre la tasa de crecimiento económico.

Se introduce el dinero en la economía a través del supuesto de que el agente representativo mantiene saldos reales con el objetivo de financiar su consumo debido a que "el dinero compra bienes, los bienes compran dinero, pero los bienes no compran bienes"; véase Blanchard (1998). De esta manera, el dinero se incorpora bajo la forma del motivo transacción. Sean $m_t = M_t/P_t$ los saldos reales *per capita* y π el costo por la tenencia de saldos reales, entonces la restricción presupuestal del individuo toma la siguiente forma:

$$\dot{m}_t + \dot{k}_t = Agk_t - c_t - \pi m_t. \tag{16}$$

Si se supone también que el total de la riqueza real del individuo está dada por la suma de su capital y sus saldos monetarios, es decir, $a_t = m_t + k_t$, entonces se tiene:

$$\dot{m}_t + \dot{k}_t = Agk_t + Agm_t - Agm_t - c_t - \pi m_t. \tag{17}$$

Equivalentemente,

$$\dot{a}_t = Aga_t - c_t - (Ag + \pi)m_t. \tag{18}$$

A continuación se incorpora una restricción del tipo *cash-in-advance*, propuesta por Clower (1967), a saber:

$$m_t = \int_t^{t+\infty} c_s \, ds, \tag{19}$$

donde α es el tiempo en que el dinero debe ser mantenido para financiar el consumo, observe que:

$$m_t = \int_t^{t+\infty} c_s \, ds \approx \alpha c_t + o(\alpha). \tag{20}$$

En lo que sigue, se supondrá que el término del error $o(\alpha)$ es despreciable, en cuyo caso $m_t = \alpha c_t$, es decir, se requieren saldos reales para financiar consumo durante el tiempo α. En consecuencia, al sustituir dicha condición en la restricción presupuestal, se obtiene:

$$\dot{a}_t = Aga_t - [1 + (\alpha Ag + \alpha\pi)]c_t. \tag{21}$$

Por lo tanto, el problema de maximización de utilidad del individuo correspondiente está dado por las ecuaciones (4) y (21), cuyas condiciones de primer orden y condición de transversalidad respectivamente son:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_t} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_t} = \dot{a}_t, \quad -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a_t} = \dot{\lambda}_t - \lambda_t \rho, \tag{22}$$

$$\lim_{t \to \infty} a_t e^{-(Ag)t} = 0. \tag{23}$$

El Hamiltoniano resultante es $\mathcal{H} = \ln c_t + \lambda_t\{Aga_t - [1 + \alpha(Ag + \pi)]c_t\}$. En el equilibrio macroeconómico, los niveles de consumo y riqueza óptimos, junto con la tasa de crecimiento son:

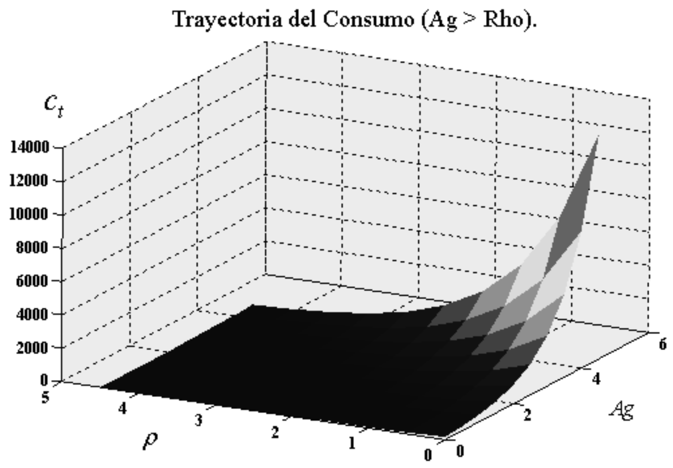
$$c_t = \frac{\rho a_0}{[1 + \alpha(Ag + \pi)]} e^{(Ag - \rho)t}, \tag{24}$$

$$a_t = a_0 e^{(Ag - \rho)t}, \tag{25}$$

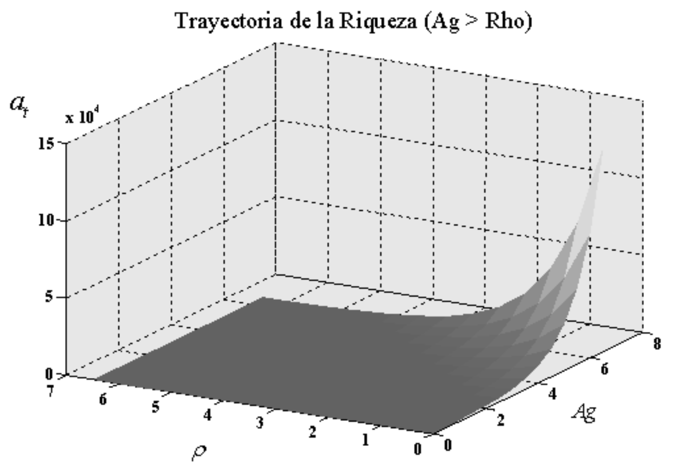
$$\psi = Ag - \rho. \tag{26}$$

El consumo depende de la riqueza inicial, del parámetro de preferencias, del nivel de tecnología, del gasto de gobierno, de la proporción de saldos reales que se mantenga y de la inflación. La riqueza depende solamente del nivel de riqueza inicial. Como es de esperarse, las trayectorias óptimas del consumo y de la riqueza aumentan cuando $Ag > \rho$, y disminuyen cuando $Ag < \rho$. Las Gráficas 1 y 2 muestran el primer caso.

Gráfica 1



Gráfica 2



En consecuencia el crecimiento económico balanceado de la economía sigue siendo:

$$\psi = \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{\dot{a}_t}{a_t} = Ag - \rho. \tag{27}$$

Dicho crecimiento no depende de la tasa de crecimiento de los saldos reales por lo que el dinero es neutral. Ahora se determina el nivel óptimo de gasto de gobierno tal que el bienestar de los hogares es el máximo posible, para ello se obtiene la función del bienestar mediante la sustitución del consumo óptimo en la función de utilidad, lo cual conduce a:

$$\mathcal{W} = \int_0^\infty \left\{ \ln \frac{\rho a_0}{[1 + (\alpha A g + \alpha \pi)]} e^{(Ag-\rho)t} \right\} e^{-\rho t}\, \mathrm{d}t. \tag{28}$$

Equivalentemente,

$$\mathcal{W} = \ln \frac{\rho a_0}{[1 + (\alpha A g + \alpha \pi)]} + \frac{Ag - \rho}{\rho^2}. \tag{29}$$

Para encontrar dicho nivel óptimo de g, se deriva la función $\mathcal{W}$ con respecto de g y se iguala a cero. Por lo tanto, se tiene:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial g} = -\frac{a_0 \alpha A}{g} + \frac{A}{\rho^2} = 0. \tag{30}$$

Si se despeja g se obtiene:

$$g = a_0 \alpha \rho^2. \tag{31}$$

En consecuencia, el nivel óptimo del gasto de gobierno está en función de la riqueza inicial de los individuos a_0, de la proporción de dinero que éstos utilicen para financiar su consumo α y del parámetro de preferencias ρ. Por lo tanto, como el gobierno conoce la riqueza inicial de los individuos, la proporción de saldos reales que éstos mantienen y sus preferencias, entonces sabe exactamente cuál es el gasto óptimo de inversión en tecnología que permitirá tener una mayor tasa de crecimiento; evidentemente, se requiere que $g > 1$ para generar un cambio positivo en las condiciones tecnológicas.

Además, dicha tasa será igual en todos los sectores lo que generará un crecimiento balanceado.

4. Gasto de gobierno y motivo reserva de valor

Si ahora se hace el supuesto de que al agente representativo le genera satisfacción mantener saldos reales en su poder (por sus servicios de liquidez), entonces el dinero se debe introducir en la función de utilidad (Sidrausky, 1967). La función de utilidad es estrictamente cóncava y ambas mercancías son no inferiores, por lo tanto:

$$\mathcal{U} = \int_0^\infty (\ln c_t + \beta \ln m_t) e^{-\rho t}\, \mathrm{d}t, \tag{32}$$

en donde $\beta > 0$ es la proporción de utilidad generada al individuo debido a la tenencia de saldos reales, y como ahora ya no se tiene una restricción *cash-in-advance*, entonces la restricción presupuestal del individuo queda como se había planteado previamente (véase ecuación 18). Por lo anterior, el problema de maximización del individuo representativo está dado por (32) y (18), y sus condiciones de primer orden junto con la condición de transversalidad son:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_t} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial m_t} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_t} = \dot{a}_t, \quad -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a_t} = \dot{\lambda}_t - \lambda_t \rho, \tag{33}$$

$$\lim_{t \to \infty} a_t e^{-(Ag)t} = 0. \tag{34}$$

El Hamiltoniano correspondiente es $\mathcal{H} = \ln c_t + \lambda_t [Aga_t - (Ag + \pi) m_t - c_t]$, y las trayectorias de consumo y de saldos reales óptimas son, respectivamente:

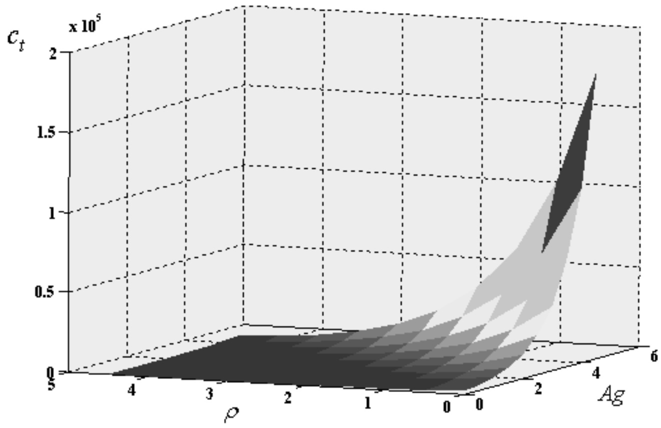
$$c_t = \frac{\rho a_0}{\beta + 1} e^{(Ag - \rho)t}, \tag{35}$$

$$m_t = \frac{\rho a_0 - 1}{Ag + \pi} e^{(Ag - \rho)t}, \tag{36}$$

Como se puede apreciar, la tasa de crecimiento es la misma utilizando el motivo transacción o el motivo reserva de valor. El consumo depende de la riqueza inicial y de la tasa subjetiva de descuento, mientras que los saldos reales dependen de la riqueza inicial, del nivel de tecnología, del gasto de gobierno y de la inflación. Es importante señalar se requiere suponer que $\rho a_0 > 1$ a fin de garantizar que $m_t > 0$. Una vez más la tasa de crecimiento es balanceada ya que tanto consumo como saldos reales crecen a la tasa dada por (27). La representación del comportamiento de las demandas de consumo y saldos reales se muestran, respectivamente, en las Gráficas 3 y 4.

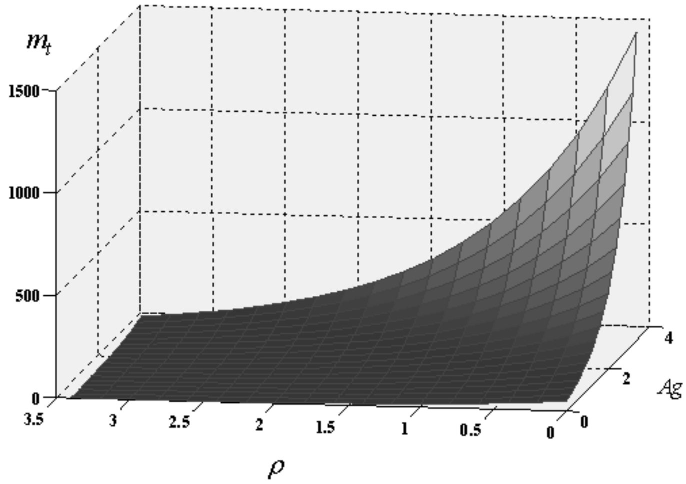
Gráfica 3

Trayectoria del Consumo (Ag > Rho).



Gráfica 4

Trayectoria de los Saldos Reales (Ag > Rho).



Los resultados obtenidos señalan que el dinero es neutral, lo que concuerda con los resultados obtenidos en estado estacionario por Sidrausky (1967). En este documento el estado estacionario no se analiza por lo que la no neutralidad encontrada por Reis (2001) no se puede refutar. Por otro lado Fischer (1979) encontró que la tasa de crecimiento del dinero afecta a la tasa de acumulación de capital y por lo tanto a la tasa de crecimiento económico, en consecuencia el dinero es no neutral. Aunque es importante señalar que la diferencia existente entre el modelo de Sidrausky y el de Fischer consiste en que en el primero se supone expectativas adaptativas y en el segundo expectativas racionales (Asako 1983).

Una vez que el individuo ha decidido cuáles son sus niveles óptimos de consumo y saldos reales, se necesita elegir cuál es el nivel óptimo de gasto de gobierno, por lo que se debe obtener la función de bienestar sustituyendo dichos óptimos en la función de utilidad, en este caso se encuentra que:

$$\mathcal{W} = \int_0^\infty \left\{ \ln\left[\frac{\rho a_0}{\beta+1} e^{(Ag-\rho)t}\right] + \beta \ln\left[\frac{\rho a_0 - 1}{Ag+\pi} e^{(Ag-\rho)t}\right] \right\} e^{-\rho t}\, \mathrm{d}t. \tag{37}$$

Equivalentemente,

$$\mathcal{W} = \ln\left[\frac{a_0}{(\beta+1)}\right] + \frac{Ag-\rho}{\rho^2} + \beta \ln \frac{\rho a_0 - 1}{(Ag+\pi)\rho} + \frac{Ag-\rho}{\rho^2}. \tag{38}$$

Para obtener el gasto óptimo del gobierno, tal que el bienestar de los hogares es el mayor posible, se obtiene la derivada de la función $\mathcal{W}$ con respecto de g y se iguala a cero, por lo que se tiene que:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial g} = 2\frac{A}{\rho^2} - \frac{\beta}{Ag\rho} = 0. \tag{39}$$

Al despejar g, se tiene que el nivel óptimo del gasto de gobierno es:

$$g = \frac{\beta\rho}{2A^2}. \tag{40}$$

Se concluye que el nivel de gasto óptimo depende de parámetro de preferencias ρ, del nivel de la tecnología A y de la utilidad que le proporciona la tenencia de saldos reales al individuo β. Asimismo, la tasa de crecimiento económico no depende de la tasa de expansión monetaria por lo que el dinero es neutral.

En resumen, se ha desarrollado un modelo de agente representativo con vida infinita en donde se incorporan la participación del gobierno a través de la inversión en tecnología y la emisión de dinero. Uno de los principales resultados obtenidos es que cuando el gobierno participa en la generación de tecnología, con ello incrementa también el bienestar de los agentes. Otro resultado relevante es que la tasa de crecimiento económico no depende de la tasa de expansión monetaria, es decir, el dinero es neutral.

Dado que el crecimiento, el cual es balanceado, depende del gasto de gobierno, se concluye que el gobierno tiene fuertes incentivos en participar en la generación de tecnología ya que con ello también afecta los otros sectores. Se encontró además que el gasto de gobierno óptimo que genera el mayor bienestar posible depende de la riqueza inicial y de los parámetros de preferencias de los individuos, así como de la cantidad de dinero que los individuos tengan en su poder.

Por otro lado, al incorporar el dinero en la función de utilidad al agente, se obtuvo una vez más que la tasa de crecimiento de la economía no es afectada por la tasa de expansión monetaria, lo que significa que existe neutralidad del dinero. En este caso, el gasto óptimo que debe realizar el gobierno para generar un crecimiento económico y, por ende, una mejora en el bienestar está en función de la tecnología, de las preferencias y de la utilidad del dinero por sus servicios de liquidez. En cualquiera de las versiones que se utilizaron para incorporar el dinero se tiene que la tasa de crecimiento de la economía es independiente de la tasa de expansión monetaria, por lo tanto se comprueba que el dinero es neutral.

5. Conclusiones

Se ha desarrollado un modelo de agente representativo con vida infinita en donde se incorporan la participación del gobierno a través de la inversión en tecnología y la emisión de dinero. Uno de los principales resultados obtenidos es que cuando el gobierno participa en la generación de tecnología, con ello incrementa también el bienestar de los agentes. Otro resultado relevante es que la tasa de crecimiento económico no depende de la tasa de expansión monetaria, es decir, el dinero es neutral.

Dado que el crecimiento, el cual es balanceado, depende del gasto de gobierno, se concluye que el gobierno tiene fuertes incentivos en participar en la generación de tecnología ya que con ello también afecta los otros sectores. Lo anterior permite establecer recomendaciones en el sentido de que políticas públicas encaminadas hacía la generación de nueva tecnología permiten fomentar una tasa de crecimiento económico mayor, lo que a su vez permite alcanzar objetivos de mediano y largo plazo respecto a un crecimiento sostenido, sobre todo en economías en vías de desarrollo como México. Se encontró además que el gasto de gobierno óptimo que genera el mayor bienestar posible depende de la riqueza inicial y de los parámetros de preferencias de los individuos, así como de la cantidad de dinero que los individuos tengan en su poder.

Por otro lado, al incorporar el dinero en la función de utilidad al agente, se obtuvo una vez más que la tasa de crecimiento de la economía no es afectada por la tasa de expansión monetaria, lo que significa que existe neutralidad del dinero. En este caso, el gasto óptimo que debe realizar el gobierno para generar un crecimiento económico y, por ende, una mejora en el bienestar está en función de la tecnología, de las preferencias y de la utilidad del dinero por sus servicios de liquidez. En cualquiera de las versiones que se utilizaron para incorporar el dinero se tiene que la tasa de crecimiento de la economía es independiente de la tasa de expansión monetaria, por lo tanto se comprueba que el dinero es neutral.

A pesar de lo anterior, las principales limitaciones que se encuentran en esta investigación consisten en suponer que el gobierno sólo interviene en la generación de tecnología, que la economía es cerrada y que las variables son deterministas. Se debería extender el análisis a una economía en donde: el gobierno además de generar tecnología pueda participar en otras actividades; la economía sea abierta y, por ende, con comercio exterior; y la incorporación de variables estocásticas para un modelado más realista del comportamiento de variables económicas y financieras fundamentales. Lo que se hará en trabajos posteriores.

Apéndice

Derivación de la fórmula (24)

Del problema de optimización planteado por (4) y (21), las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_t} = \frac{1}{c_t} - \lambda_t[1 + (\alpha A g + \alpha \pi)] = 0, \qquad (A.1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_t} = A g a_t - [1 + (\alpha A g + \alpha \pi)]c_t = \dot{a}_t, \qquad (A.2)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a_t} = -\lambda_t(Ag) = \dot{\lambda}_t - \lambda_t \rho, \qquad (A.3)$$

Después de despejar el consumo de (A.1), se obtiene:

$$c_t = \frac{1}{\lambda_t[1 + (\alpha A g + \alpha \pi)]}. \qquad (A.4)$$

Al factorizar de (A.3) λ_t y, posteriormente, despejar $\dot{\lambda_t}$ se sigue que:

$$\dot{\lambda_t} = \lambda_t(\rho - Ag). \qquad (A.5)$$

Si $\dot{x_t} = \alpha x_t$ la solución de la ecuación diferencial es de la forma $x_t = x_0 e^{\alpha t}$, entonces las soluciones de las ecuaciones diferenciales (A.2) y (A.5) son respectivamente:

$$a_0 = \int_0^{\infty} [1 + (\alpha Ag + \alpha\pi)] c_t e^{-(Ag)t}\, dt, \qquad (A.6)$$

$$\lambda_t = \lambda_0 e^{(\rho - Ag)t}. \qquad (A.7)$$

Si se sustituye (A.7) en (A.2), se obtiene:

$$c_t = \frac{1}{\lambda_0[1 + (\alpha Ag + \alpha\pi)]} e^{-(\rho - Ag)t}. \qquad (A.8)$$

Al sustituir la ecuación (A.8) en (A.6), se tiene:

$$a_0 = \int_0^{\infty} \frac{[1 + (\alpha Ag + \alpha\pi)]}{[1 + (\alpha Ag + \alpha\pi)]\lambda_0} e^{-(\rho - Ag)t} e^{-(Ag)t}\, dt, \qquad (A.9)$$

Después de simplificar se produce la siguiente ecuación:

$$a_0 = \frac{1}{\lambda_0 \rho} \int_0^{\infty} \rho e^{-\rho t}. \qquad (A.10)$$

Observe que $\int_0^{\infty} \mu e^{-\mu x}\, dx = 1$ para $\mu > 0$, entonces

$$\frac{1}{\lambda_0} = \rho a_0. \qquad (A.11)$$

De esta manera, cuando se sustituye la ecuación (A.11) en (A.8), se encuentra la trayectoria del consumo:

$$c_t = \frac{\rho a_0}{[1 + (\alpha Ag + \alpha\pi)]} e^{(Ag - \rho)t}. \qquad (A.12)$$

Derivación de la fórmula (25)

Si se sustituye la ecuación (A.12) en (A.2), se obtiene:

$$\dot{a_t} = (Ag) a_t - \rho a_0 e^{(Ag - \rho)t}. \qquad (A.13)$$

Se sabe que si $\dot{x}_t = \alpha x_t + f(t)$, entonces la solución es de la forma $x_t = x_0 e^{\alpha t} + e^{\alpha t}\int_0^t f(s) e^{\alpha s} ds$. Por lo tanto, se obtiene que:

$$a_t = a_0 e^{(Ag)t} - e^{(Ag)t}\int_0^t \rho a_0\, e^{(Ag-\rho)s} e^{-(Ag)s} ds. \qquad (A.14)$$

Al resolver, la ecuación anterior, se sigue que:

$$a_t = a_0 e^{(Ag-\rho)t}. \qquad (A.15)$$

Derivación de las ecuaciones (35) y (36)

Las condiciones de primer orden del problema planteado por (18) y (32) son:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_t} = \frac{1}{c_t} - \lambda_t = 0, \qquad (A.16)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial m_t} = \frac{\beta}{m_t} - \lambda_t (Ag + \pi) = 0, \qquad (A.17)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_t} = Ag a_t - (Ag + \pi) m_t - c_t = \dot{a}_t, \qquad (A.18)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a_t} = -\lambda_t (Ag) = \dot{\lambda}_t - \lambda_t \rho. \qquad (A.19)$$

Por lo tanto, al despejar el consumo de (A.16) y los saldos reales de (A.17), se tiene respectivamente que:

$$c_t = \frac{1}{\lambda_t}, \qquad (A.20)$$

$$m_t = \frac{\beta}{\lambda_t (Ag + \pi)}. \qquad (A.21)$$

Después de despejar $\dot{\lambda}_t$ de (A.19), resulta:

$$\dot{\lambda}_t = \lambda_t (\rho - Ag). \qquad (A.22)$$

Una vez determinadas las ecuaciones diferenciales (A.18) y (A.22), si se supone que $\lim_{t\to\infty} a_t e^{-(Ag)t} = 0$, se tienen, respectivamente:

$$a_0 = \int_0^{\infty} (Ag + \pi)m_t + c_t e^{-(Ag)t} dt, \qquad (A.23)$$

$$\lambda_t = \lambda_0 e^{(\rho - Ag)t}. \qquad (A.24)$$

Si se sustituye la ecuación (A.24) tanto en (A.20) como en (A.21), se obtienen:

$$c_t = \frac{1}{\lambda_0 e^{(\rho - Ag)t}}, \qquad (A.25)$$

$$m_t = \frac{\beta}{\lambda_0 e^{(\rho - Ag)t}(Ag + \pi)}. \qquad (A.26)$$

Si se sustituyen ahora las ecuaciones (A.25) y (A.26) en la ecuación (A.23), resulta que:

$$a_0 = \left(\frac{\beta + 1}{\lambda_0 \rho}\right) \int_0^{\infty} \rho\, e^{-\rho t}\, dt. \qquad (A.27)$$

En consecuencia, debido a que $\int_0^{\infty} \mu e^{-\mu x}\, dx = 1$ para toda $\mu > 0$, si se despejan $1/\lambda_0$ y β, se llega a:

$$\frac{1}{\lambda_0} = \frac{\rho a_0}{\beta + 1}, \qquad (A.28)$$

$$\beta = \lambda_0 \rho a_0 - 1. \qquad (A.29)$$

Por último para encontrar la trayectoria del consumo se sustituye la ecuación (A.28) en (A.25), y para encontrar la trayectoria de los saldos reales se sustituye la ecuación (A.29) en (A.26), con lo que se obtienen, respectivamente:

$$c_t = \frac{\rho a_0}{\beta + 1} e^{(Ag - \rho)t}, \qquad (A.30)$$

$$m_t = \frac{\rho a_0 - 1}{Ag + \pi} e^{(Ag - \rho)t}. \qquad (A.31)$$

Referencias

Azako, Kazumi, "The Utility Function and the Superneutrality of Money on the Transition Path", en *Econometrica*, Vol. 51, No.5, septiembre de 1983, pp. 1593-1596.

Barro, Robert, “Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth”, en *The Journal of Political Economy*, Vol. 98, No. 5, octubre de 1990, pp. S103-S125.

Blanchard, Oliver y Stanley Fisher, “Lectures of Macroeconomics”, Massachusetts & London, The MIT Press, 1998, p. 165.

Clower, Robert, “A Reconsideration of the Microfoundations of Monetary Theory”, en *Western Economic Journal*, Vol. 6, diciembre de 1967, pp. 1-8.

Fischer, Stanley, “Capital Accumulation on the Transition Path in a Monetary Optimizing Model”, en *Econometrica*, Vol. 47, No. 6, noviembre de 1979, pp. 1433-1439.

Futagami, Koichi, Morita, Yuichi, y Akihisa Shibata, “Dynamic Analysis of a Endogenous Growth Model with Public Capital”, *The Scandinavian Journal of Economics*, Vol. 95, No.4, 1993, pp. 607-625.

Harrod, Roy, “An Essay in Dynamic Theory”, en *Economic Journal*, Vol. 49, No. 193, marzo de 1939, pp. 14-33.

Jones, Larry y Rodolfo Manuelli, “A Convex Model of Equilibrium Growth: Theory and Policy Implications”, *The Journal of Political Economy*, Vol. 98, No. 5, Part 1, 1990, pp. 1008-1038.

Lucas, Robert, “On the Mechanics of Economic Development”, *Journal of Monetary Economics*, 22, 1988, pp. 3-42.

Patinkin, Don, “Money, Interest and Prices”, Massachusetts, The MIT Press, 1956.

Rebelo, Sergio, “Long Run Policy Analysis and Long Run Growth”, en *The Journal of Political Economy*, Vol. 99, No. 3, junio de 1991, pp. 500 – 521.

Reis, Ricardo, “The Analytics of Monetary Non-Neutrality in the Sidrauski Model”, Princeton, Princeton University Prees, 2001, pp. 1-8.

Romer, Paul, “Increasing Returns and Long-Run Growth”, *The Journal of Political Economy*, Vol. 94, No. 5, 1986, pp. 1002-1037.

Romer, Paul, “Endogenous Technological Change”, *The Journal of Political Economy*, Vol. 98, No. 5, Part 2: The Problem of Development: A Conference of the Institute for the Study of Free Enterprise System, 1990, pp. S71-S102.

Sidrauski, Miguel, “Rational Choices and Patterns of Growth in a Monetary Economy”, en *American Economic Review*, Vol. 57, No. 2, mayo de 1967, pp. 534-544.

Venegas-Martínez, Francisco, "Crecimiento endógeno, dinero, impuestos y deuda externa", en *Investigación Económica*, Vol. 59, No. 229, 1999, pp.15-36.

Venegas-Martínez, Francisco, “Un modelo estocástico de equilibrio macroeconómico: acumulación de capital, inflación y política fiscal”, en *Investigación Económica*,