DOS APLICACIONES DEL PROCESO DE POISSON COMPUESTO NO HOMOGÉNEO

Luis Fernando Hoyos Reyes[*]
Marissa R. Martínez-Preece[**]
Mariem Henaine-Abed[*]

INTRODUCCIÓN

El mundo globalizado de hoy en día, presenta problemas con una complejidad nunca antes vista, una estrategia para resolver dichos problemas es la elaboración de modelos que al integrar las variables involucradas más importantes y al considerar las circunstancias de la situación que se analiza hagan posible llegar a una solución adecuada. La importancia de los modelos que se desarrollan en las diversas ramas de la ciencia, está en función directa con la trascendencia de los problemas que permitan resolver.

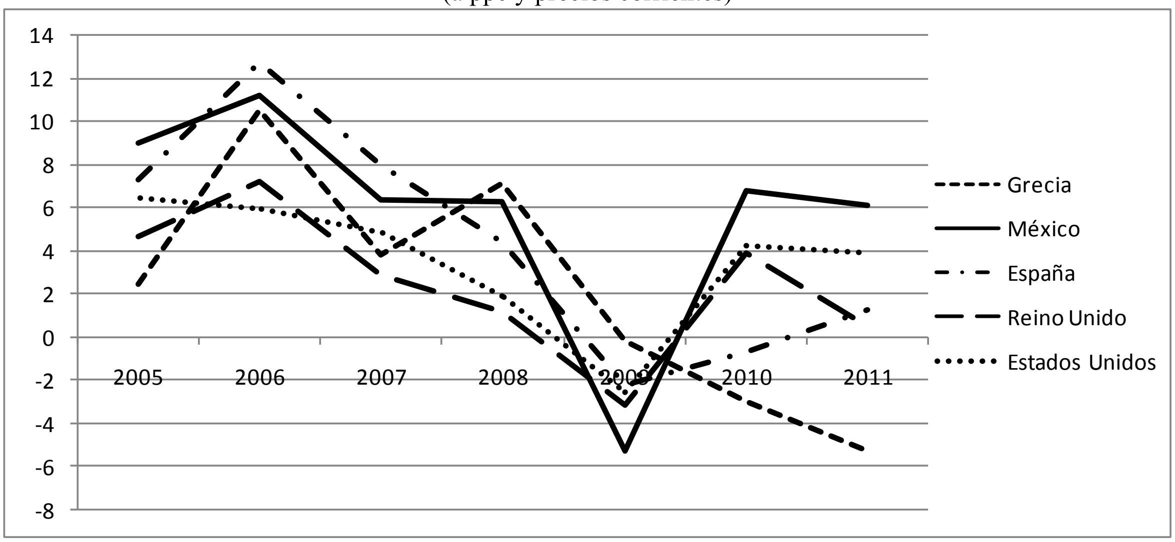
Dos de los aspectos más críticos que enfrenta la sociedad actual, son el económico-financiero y el ambiental, ambas problemáticas tan disímiles tienen como punto en común el hecho de representar factores cruciales para la supervivencia de la sociedad actual.

Las últimas crisis se han generado en el sistema financiero, rebasándolo y transfiriéndose a la economía real. Los indicadores de producción de algunos de las principales economías del mundo tuvieron bajas abruptas, iniciando en 2008 en Estados Unidos, seguida de la crisis de la eurozona, que empezó en Grecia en 2009. Como se puede observar en la gráfica 1, el Producto Nacional Bruto de algunas de las economías europeas más afectadas por la crisis de la eurozona, del Reino Unido, de Estados Unidos y de México tuvieron bajas significativas en su Producto Nacional Bruto, sin haber logrado alcanzar los niveles que tenían antes de la crisis. La baja abrupta del PNB en 2009 afectó prácticamente a todos los sectores económico y por ende a la industria en estas economías. Esta caída implicó variaciones significativas en los flujos de ingresos de las empresas, afectando y

[*] División de CBI, Departamento de Sistemas, UAM-Azcapotzalco.
[**] División de CSH, Departamento de Administración, UAM-Azcapotzalco.

modificando el proceso de toma de decisiones, y en consecuencia el desempeño general de la empresa.

Gráfica 1
Cambio porcentual del PNB con respecto al año anterior
(a ppc y precios corrientes)



Fuente: Elaboración propia con información de OECD. Economic Outlook.

Dada la relevancia de conocer el comportamiento de los flujos de ingreso (Venegas, 2006), en este trabajo se explicará cómo aplicar algunas extensiones del proceso de Poisson Compuesto para modelar los flujos de ingreso, que bajo ciertas circunstancias que se explicarán más adelante, también podría considerarse como los flujos de caja de una empresa, y cómo se comportan en ciertos momentos del ciclo económico.

Por otra parte, dentro del contexto de la problemática ambiental, la contaminación se puede estudiar en función del elemento en el que se encuentra el contaminante, así se tiene la contaminación del aire, del suelo, del agua, etc. Aunque todos los tipos de contaminación son importantes, dado que se trata de un sistema, la contaminación del agua está tomando proporciones alarmantes, de acuerdo al reporte del Instituto Blacksmith (Blacksmith Institute, 2011), 1.1 millones de personas en el mundo no tienen acceso a agua limpia y alrededor de la mitad de la población mundial no cuenta con tratamientos de agua adecuados; Orme (Orme, 2008) establece que aproximadamente el 46% de los lagos de América están demasiado contaminados para permitir la pesca, el nado o la vida acuática;

por su parte Wehr (Wehr, 2011), afirma que cada año 1.2 trillones de galones de drenaje no tratado, agua de lluvia y desperdicio industrial son depositados en aguas de Estados Unidos de América, y que globalmente 15 millones de personas menores de 5 años mueren cada año a causa de enfermedades provocadas por la ingestión de agua.

Se puede decir que la contaminación del agua ocurre cuando un cuerpo de agua se ve afectado negativamente debido a la adición de cantidades excesivas de materiales al agua, cuando ésta no es adecuada para los fines necesarios, se considera contaminada (Nhapi, 2012, Panda, 2002). De entre todas las formas posibles de contaminación del agua, la producida por metales pesados es una de las más críticas, ya que éstos son no biodegradables, tóxicos y persistentes, ocasionando serios problemas en la ecología acuática (Akobundu, 2012, Jumbe, 2009). Algunos metales pesados como son cromo (Cr), cobre (Cu), fierro (Fe) y zinc (Zn) son necesarios para la vida biológica, pero solamente en pequeñas cantidades, mientras que otros como el plomo (Pb) y el cadmio (Cd), son perjudiciales aún en pequeñas concentraciones.

La toxicidad de un metal generalmente se define en términos de la concentración requerida para causar una respuesta aguda, letal o sub-letal, respuestas sub-letales comunes de organismos acuáticos a concentraciones perjudiciales de metales pesados incluyen la inhibición del crecimiento, la interferencia con la reproducción, el metabolismo y el comportamiento, el riesgo de efectos adversos es mayor si la exposición es prolongada, pero se pueden presentar efectos agudos cuando las concentraciones aumentan entre 3 y 10 veces más allá del nivel perjudicial más bajo (Nhapi, 2012, Squibb, 2002).

Los metales pesados pueden entrar en los cuerpos de agua de diversas formas, por precipitación, desgaste de rocas, erosión, drenaje, actividades de agricultura, minería y por depósito deliberado de residuos industriales. Es esta última la forma de contaminación del agua que se trata en este trabajo, en particular, se considera el problema del depósito en un lago, de aguas residuales contaminadas con metales pesados resultado de procesos industriales a través de camiones cisterna.

El problema se centra en un sistema acuífero cerrado en el que se descargan residuos industriales conteniendo metales pesados, éstos se depositan en el lecho del sistema donde los primeros eslabones de la cadena alimentaria (como son algas y moluscos), se alimentan y se contaminan con dichos metales, pudiendo causar enfermedades o incluso la muerte a peces, otros animales o a los humanos que les consumen (Hicks, 2012). Los tiempos de descarga y las concentraciones de contaminantes son variables aleatorias. Se desea calcular la probabilidad de supervivencia del sistema después de un cierto tiempo t.

Dado lo anterior el objetivo de este trabajo es utilizar el proceso de Poisson Compuesto y una de sus extensiones para modelar el riesgo en dos casos específicos: en el ámbito financiero, para estudiar el comportamiento de los flujos de ingreso, y en ingeniería ambiental para medir la probabilidad de supervivencia de un sistema acuífero cerrado.

Para lograr el objetivo, este trabajo se dividió en tres partes. En la primera se describe el modelo de Poisson Compuesto en su aplicación clásica, la cual describe la medición del riesgo actuarial, y se propone su valuación mediante métodos de Monte Carlo. En la segunda parte se trata la formulación de riesgos no homogéneos y se describen las variables involucradas en la aplicación financiera y ambiental, y en la tercera sección se ofrecen las conclusiones.

1. MODELOS DE RIESGO Y EL PROCESO DE POISSON COMPUESTO

A continuación se describe el modelo de riesgo clásico, que se desarrolló inicialmente en el ámbito actuarial y está basado en el proceso de Poisson Compuesto, con la finalidad de modelar el comportamiento de una póliza de seguros y formular una medida de riesgo, (Gerber y Shin, 1998) . Sin embargo, los resultados teóricos de la teoría de riesgo actuarial están acotados a casos relativamente sencillos y difícilmente justificables en el modelado de problemas reales en ámbitos diferentes al sector de seguros y fianzas.

1.1 Hipótesis y definiciones del modelo de riesgo actuarial

Hipótesis 1.1

(a) Las reclamaciones ocurren de acuerdo a un proceso de Poisson $\{N_t\}_{t\geq 0}$ con tasa de llegada λ constante y tiempos entre reclamaciones $\{T_t\}_{t\geq 1}$.

(b) Los montos de las reclamaciones $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias no negativas con esperanza finita μ.

(c) X_i y $\{N_t\}_{t\geq 0}$ son independientes.

Definición 1.2 Se conoce como un proceso de reclamaciones acumuladas a $Z_t := \sum_{n=0}^{N_t} X_n$ para $t \geq 0$ con $X_0 := 0$.

Definición 1.3 Sea u el capital inicial y $c > 0$ la tasa de ingresos constante.
El proceso de riesgo clásico se define como:

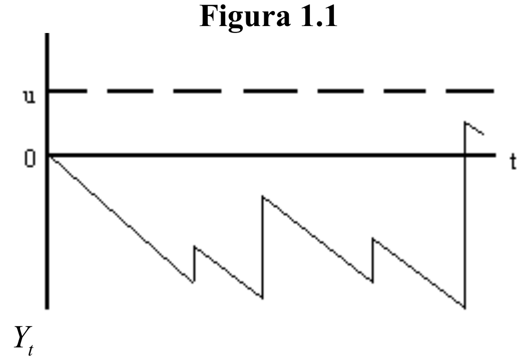
$$Y_t := Z_t - ct, \quad t \in (0, \infty),$$

y el tiempo para la ruina

$$\tau := \inf\{t > 0 \mid Y_t > u\}$$

Cuando no hay reclamaciones el proceso de riesgo Y_t se comporta como una recta con pendiente $-c < 0$, las reclamaciones se van acumulando y puede llegar el momento en que el capital total $u - Y_t$ sea negativo, ese es el momento de la ruina. En la figura 1.1 se muestra la realización de un proceso de riesgo donde la ruina no sucede.

Figura 1.1



Definición 1.4 Bajo las Hipótesis 1.1, la probabilidad de ruina en tiempo finito es

$$\Psi(u,T) := P(\tau < T),$$

y la probabilidad de ruina bajo horizonte infinito es

$$\Psi(u) := P(\tau < \infty).$$

Usualmente se calcula la tasa constante de ingresos de acuerdo a

$$c = (1+\rho)EZ_t / t,$$

dado que Z_t es un proceso de Poisson compuesto, c es independiente del tiempo t. El número ρ es el factor de recargo y es usualmente positivo, la idea consiste en que ingrese un capital mayor que la pérdida esperada por cada unidad de tiempo, es decir

$$(1+\rho)\frac{EZ_t}{t} > \frac{EZ_t}{t}.$$

Teorema 1.5 *Si se considera un proceso de riesgo clásico, entonces la probabilidad de ruina cuando el capital inicial es cero y* $c > \lambda\mu$ *es*

$$\Psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c} = \frac{1}{1+\rho},$$

donde $\mu = EX_i$ *y* λ *es la tasa de llegada.*

Corolario 1.6 *Sea* Y_t *un proceso de riesgo clásico con reclamaciones distribuidas* $\exp(1/\mu)$ *y* $\rho > 0$*, entonces*

$$\Psi(u) = \frac{1}{1+\rho} e^{-\frac{\rho u}{\mu(1+\rho)}}$$

Para las demostraciones del teorema 1.5 y el corolario 1.6 ver Beard et al. (1984) y Grandell (1991).

Una vez expuestos los elementos básicos del Proceso de Poisson Compuesto, se sugiere estudiar el comportamiento de las aplicaciones mediante métodos de Montecarlo, ya que es factible formular estimadores bajo esta metodología y calcularlos numéricamente con una precisión aceptable para medir el riesgo (Hoyos-Reyes, 2001).

1.2 Métodos de Monte Carlo

Los métodos de Monte Carlo son una técnica de muestreo (Fishman, 1997) basado en formular estimadores para problemas cuya solución exacta se desconoce o es extremadamente difícil de obtener (Embrechts y Wouters, 1990; Jiang, 2009).

La idea básica consiste en efectuar un número *n* suficientemente grande de realizaciones de un proceso, Z_t en nuestro caso y contar el número de veces que dicho proceso alcanza o supera el ingreso total meta θ, digamos *k*, luego por la citada Ley estimamos $\psi(\theta,t)$, mediante $\hat{\psi}(\theta,t) = k/n$.

1.2.1 Formulación de estimadores de Monte Carlo (EMC)

Sea $I_{\{Z_t \geq \theta\}}$ la función indicadora del evento $\{Z_t \geq \theta\}$ por la Ley Fuerte de los Grandes Números $\bar{I}\{Z_t \geq \theta\} = k/n$ converge a la esperanza de la función indicadora $EI_{\{Z_t \geq \theta\}}$, pero

$$EI_{\{Z_t \geq \theta\}} = P\{Z_t \geq \theta\} = \psi(\theta,t),$$

luego el EMC de $\psi(\theta,t)$ que buscamos es $\hat{\psi}(\theta,t) = \bar{I}\{Z_t \geq \theta\} = k/n$.

A continuación se presentará la extensión conocida del proceso de Poisson compuesto no homogéneo y las aplicaciones propuestas, para lo cual, en el ejemplo financiero X_i representa el monto del *i-ésimo* ingreso, y el monto acumulado se expresa como Z_t. En el caso de un sistema acuífero cerrado, por ejemplo un lago o una presa, X_i representa la cantidad en kilogramos de metales pesados presentes en la descarga de aguas residuales en el lago, y Z_t es la cantidad total acumulada de metales pesados en un intervalo de tiempo de longitud t.

2. FORMULACIÓN DE MODELOS DE RIESGO NO HOMOGÉNEO.

La variante de esta formulación, con respecto al modelo clásico, se refiere a que la tasa de llegada λ, ya no es fija sino que es una función que depende del tiempo $\lambda(t)$, y puede ser continua o discontinua (Hoyos-Reyes, et al (2011). La definición de este modelo se muestra a continuación.

Procesos de Poisson no estacionarios

Definición 2.1 Un proceso estocástico $\{N_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso de conteo si:

(i) $N_t \geq 0$.

(ii) N_t toma valores enteros.

(iii) Si $s < t$, entonces $N_s \leq N_t$.

(iv) Para $s < t$, $N_t - N_s$ es el número de eventos que ocurrieron en el intervalo $(s, t]$.

Definición 2.2 El proceso de conteo $\{N_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso de Poisson no estacionario con función de intensidad $\lambda(t) > 0, \quad t \geq 0$, si:

(i) $N_0 = 0$.

(ii) $\{N_t\}_{t\geq 0}$ tiene incrementos independientes.

(iii) $P(N_{t+h} - N_t \geq 2) = o(h)$.

(iv) $P(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda(t)h + o(h)$.

Sea

$$a(t) := \int_0^t \lambda(s)ds\,,$$

la medida de intensidad de $\{N_t\}_{t\geq 0}$.

Teorema 2.3 Sea $\{N_t\}_{t\geq 0}$ un proceso de Poisson no estacionario y sean $t,s \geq 0$, entonces $N_t - N_s$ se distribuye Poisson con esperanza $a(t+s) - a(t)$.

Para la demostración ver Cordero (2011) al igual que la Proposición 2.4. Es importante resaltar que el Teorema 2.3 implica que $E(N_t) = E(N_t - N_0) = a(t)$.

Proposición 2.4 $a(t)$ es una función no decreciente y continua por la derecha.

Definición 2.5 La inversa de la medida de intensidad es

$$a^{-1}(t) := \sup\{s | a(s) \leq t\}$$

Observe que a^{-1} es continua por la derecha. Si además a es continua, a^{-1} es creciente y

$$a \circ a^{-1}(t) = t, \qquad t < a(\infty)$$

Observación 2.6 Si se considera N un proceso de Poisson no estacionario con medida de intensidad a continua con $a(\infty) = \infty$, como a^{-1} es creciente $\underline{N} := N \circ a^{-1}$ tiene incrementos independientes. Por otra parte el Teorema 2.3 implica que $\underline{N}_t - \underline{N}_s = N_{a^{-1}(t)} - N_{a^{-1}(s)}$ se distribuye Poisson con esperanza

$$a\left(a^{-1}(t)\right) - a\left(a^{-1}(s)\right) = t - s\,.$$

Entonces el proceso de conteo $\underline{N}$ es un proceso de Poisson estacionario con $\lambda = 1$.

Por la Proposición 2.4 que a es necesariamente no decreciente y continua por la derecha, luego el límite por la izquierda

$$a\left(t^{-}\right):=\lim_{s\uparrow t} a(s)$$

existe para toda t. Supóngase que para un punto particular t, $a\left(t^{-}\right)\neq a(t)$, y sea $a:=a(t)-a\left(t^{-}\right)$. Entonces el número de arribos $N_t-N_{t^-}$ tiene por el Teorema 2.3 esperanza a. Aplicando la definición 2.2 en particular los incisos (iii) y (iv), $N_t-N_{t^-}$ es 0 o 1, entonces

$$\begin{aligned}&E\left(N_t-N_{t^-}=0\cdot P\left(N_t-N_{t^-}=0\right)+1\cdot P\left(N_t-N_{t^-}=1\right)\right)\\&=P\left(N_t-N_{t^-}=1\right)=a(t)-a\left(t^{-}\right)=a.\end{aligned}$$

Se puede pensar en el punto t como el momento en que un arribo está programado y que puede llegar con probabilidad a y no llegar con probabilidad $1-a$. Si a tiene saltos de magnitudes $a_1,a_2,...$ en los tiempos fijos $t_1,t_2,...$, entonces del análisis anterior habrá un arribo exactamente en t_i con probabilidad $a_1,t_1,t_2...$

Observación 2.7 Un proceso Poisson no estacionario N_t puede interpretarse como la suma de dos procesos de conteo,

$$N_t=N_t^f+N_t^c,\qquad t\geq 0, \tag{1}$$

los tiempos de salto N_t^f son fijos, estos son los puntos de discontinuidad de a y la probabilidad de que ocurra un salto en el momento fijo t es $a(t)-a\left(t^{-}\right)$. Si se define $a^f(t)$ como la suma de todos los saltos de a en $[0,t]$, es decir

$$a^f:=\sum_{s\leq t}\left(a(s)-a\left(s^{-}\right)\right),$$

entonces

$$a^c(t)=a(t)-a^f(t),\qquad t\geq 0,$$

es una función continua no decreciente y el segundo componente en la descomposición de la ecuación (1) es un proceso de Poisson no estacionario con medida de intensidad a^c. Esto permite formular un algoritmo para estimar la probabilidad de ruina bajo un proceso de Poisson no estacionario con a discontinua.

Observación 2.8 Aplicaciones del modelo no homogéneo

A continuación se aplica el modelo para los dos casos específicos mencionados anteriormente.

En el caso financiero, dado que los montos de ingresos[1] son aleatorios, es decir, pueden fluctuar conforme cambian las condiciones específicas de la empresa o las condiciones económicas generales, éstos pueden modelarse mediante un proceso de Poisson no homogéneo, conforme a la definición 1.2:

$$Z_t := \sum_{n=0}^{N_t} X_i$$

Como se mencionó anteriormente, X_i representa el monto del *i-ésimo* ingreso, y $X_i > 0$, por lo tanto los ingresos sólo pueden tomar valores positivos. Z_t representa el monto de los ingresos totales acumulados. Estos montos de ingreso tienen una tasa de llegada que varía con el tiempo, $\lambda(t)$, y como se mencionó anteriormente puede ser continua o discontinua. En donde N_t es un proceso de Poisson no homogéneo y modela el número de ingresos.

Así, la medida de riesgo se puede considerar como $P\{Z_t \geq \theta\}$ en donde θ representa la cantidad de ingresos mínimos que se deben acumular, durante cierto período, para que la empresa tenga posibilidades de continuar operando.

[1] El modelo aplica para los casos en que los montos de ingreso se pueden considerar tanto en términos nominales como reales.

En el caso del modelo ambiental, las descargas de aguas residuales en el lago, se llevan a cabo mediante camiones cisterna, de manera aleatoria, la variable X_i representa la cantidad en kg. de metales pesados contenidos en el agua residual descargada en el lago en la iésima descarga, N_t es el número total de descargas.

$$Z_t := \sum_{n=0}^{N_t} X_i$$

Es la cantidad total de metales pesados en el lago y está dada por la suma de los kg disueltos en el agua vertida en el lago en cada descarga, θ es la cantidad máxima en kg de metales pesados que el sistema puede soportar antes de su colapso. De esta forma, se puede calcular la probabilidad de extinción del sistema para un cierto período.

$$P\{Z_t \geq \theta\}$$

En este caso, el sistema se considera como un sistema cerrado, donde los metales pesados se introducen a partir de las descargas de aguas residuales industriales por medio de carros cisterna, sin que exista ningún sistema de recolección que elimine los metales pesados.

CONCLUSIONES

Las formulaciones presentadas permiten medir el riesgo de colapso de un sistema de una manera diferente a la aplicación tradicional dentro del ámbito de los seguros y finanzas, haciendo posible la evaluación de problemáticas estudiadas por disciplinas muy diferentes, que como se presentó en este trabajo, pueden abarcar desde las finanzas hasta la ingeniería ambiental. Además de las variantes aquí mostradas, el modelo de Poisson compuesto puede utilizarse para realizar análisis de escenarios y como herramienta en el proceso de toma de decisiones.

Como se mencionó anteriormente, en la extensión del proceso de Poisson compuesto, el riesgo puede calcularse mediante métodos de Montecarlo, ya que éstos permiten formular los estimadores buscados en casos en que éstos puedan ser difíciles de obtener.

El presentar la formulación del proceso de Poisson no homogénea para ejemplificar su flexibilidad en situaciones pertenecientes a distintas disciplinas representa una contribución de este trabajo. A esto se le puede añadir el hecho que al estar en posibilidades de estimar el riesgo mediante métodos de Montecarlo, el proceso de toma de decisiones, basado en datos cuantitativos, se simplifica, y los costos de aplicación disminuyen debido a que se puede simular el comportamiento de ciertas variables, fases o escenarios, sin necesidad de recrearlos, lo cual resulta un elemento valioso en el proceso de toma de decisiones.

REFERENCIAS

Akobundu, Amadi N. (2012). Quality Assessment of Aba River Using Heavy Metal Pollution Index. *American Journal of Environmental Engineering.*2 (1*):*45-49 DOI: 10.5923/j.ajee.20120201.07 Recuperado el 12 de septiembre de 2012.

Beard, R.E., Pentikainen, T., y Pesonen, E. (1984). *Risk Theory*. (1a Ed.). Chapman and Hall, Nueva York, EEUU.

Blacksmith Institute (2011). *The World's Worst Toxic Pollution Problems.* [en línea]. Recuperado el 9 de septiembre de 2012, de http://www.worstpolluted.org/the-top-ten-of-the-toxic-twenty.html

Cordero Parra, M.G. (2011). " Estimación de la esperanza de la función de penalización descontada en procesos de riesgo con medida de intensidad continua: el caso de la probabilidad de ruina en tiempo finito", *Estocástica: finanzas y riesgo*. Año 1, No.1, pp. 75-85.

Embrechts, P., y Wouters, P. (1990). "Simulating risk solvency", *Insurance: Mathematics and Economics,* 9, pp. 141–148.

Fishman, George S. (1997). *Monte Carlo. Concepts, Algorithms and Applications*, Springer Series in Operations Research, EEUU.

Gerber, H.U., y Shiu, E.S.W. (1998). "On the time value of ruin", *North American Actuarial Journal*, 2(1), pp. 48-78.

Grandell, Jan. (1991). *Aspects of Risk Theory*. Springer Verlag, EEUU.

Hicks, Sarah (2012). *Pollution.* [en línea] Recuperado el 10 de Septiembre de 2012, de http://www.lakescientist.com/learn-about-lakes/water-quality/pollution.html

Hoyos-Reyes, L.F. (2001). "Monte Carlo approach to insurance ruin problems using conjugate processes", Morfismos, 5(2), pp. 37-50

Hoyos-Reyes L., Martínez-Preece M., López-Herrera F. (2011), "Estimación de la probabilidad de ruina en tiempo finito bajo un proceso de Poisson no estacionario con medida de intensidad discontinua". *Administración de riesgos. Volumen III. Modelos y entorno financiero*.. Serie Estudios, UAM-A. México, D.F. México. Pp. 231-244

Jumbe, A. S., N. Nandini. (2009), "Heavy metals assessment of wet-lands around Peenya industrial area, Bangalore, India". *Journal of Research in Environment and Life Sciences,* Vol. 2 (1). pp. 25-30.

Nhapi,I., U.G. Wali, D. Usanzineza, N. Banadda, J.J. Kashaigili, R. Kimwaga, W. Gumindoga y S. Sendagi. (2012) "Heavy Metals Inflow into Lake Muhazi, Rwanda". *The Open Environmental Engineering Journal.*5,00-00 1 1874-8295/12 2012. [en línea] Recuperado el 12 de septiembre de 2012 de http://vicres.net/Nhapi%20MS%20and%20Banadda%20OEEJ%202012.pdf

OECD, (2012). *Economic Outlook. General Assesment of the Macroeconomic Situation.* Volumen 2012/1. OECD.

Orme, Helen. (2008). *Earth in Danger: Pollution.* New York, NY: Bearport Publishing [en línea], Recuperado el 12 de septiembre de 2012, de http://facts.randomhistory.com/pollution-facts.html

Panda, D. S., R.K. Behera, R. K. Sahu y S. N. Bandhopadhya. (2002). *Heavy metal Pollution in Chilika Lake, A tropical laggon. Orissa, India*. Recuperado el 12 de Septiembre de 2012 de http://ces.iisc.ernet.in.

Squibb, K. (2002) *Toxicity of Metals,* System wide program in toxicity. University of Maryland. [en línea] Recuperado el 12 de septiembre de 2012 de http://aquaticpath.umd.edu/toxnurse/metals.pdf

Venegas Martinez, Francisco. (2006). *Riesgos financieros y económicos. Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre.*(1ª. Ed.), International Thomson Editores, México

Wehr, Kevin (2011). *Green Culture: An A-to-Z Guide*. Thousand Oaks, CA: Sage. [en línea] Recuperado el 11 de septiembre de 2012, de http://facts.randomhistory.com/pollution-facts.html